学校编号：10384　　　　分类号：________ 密级：________
学　号：17020051301582　　　　UDC: ____________________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

强拟凸域上边界摄动的 B-M 型积分的稳定性

Steadiness of Bochner-Martinelli Integrals with Perturbation on the Boundary on Strictly Pseudoconvex Domain

李　娜

指导教师姓名：　陈吕萍　副教授

专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2008 年 5 月

论文答辩日期：　2008 年　月

学位授予日期：　2008 年　月

答辩委员会主席：________

评　阅　人：________

2008 年　5 月

Steadiness of Bochner-Martinelli Integrals with Perturbation on the Boundary on Strictly Pseudoconvex Domain

By

Na Li

Supervisor: Lüping Chen

Speciality: Several complex variables

Institution: School of Mathematical Science

Xiamen University

Xiamen, P. R. China

May , 2008

学　位　论　文

强拟凸域上边界摄动 B-M 型积分的稳定性

李　娜

厦　门　大　学

二 0 0 八 年　月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）.

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目录

Contents

摘　要

本文讨论了强拟凸域上边界摄动的 B-M 型积分的稳定性问题，并讨论了摄动对 B-M 公式的影响。

第一章是预备知识, 主要介绍了一些重要的定义和引理, 如强多次调和函数, 强拟凸域，复流形的定向，和强多次调和 C^2 函数等。

本文的主要结果放在第二章。

第一节介绍了 B-M 型积分 $\Phi(\varphi)(z) = \int_{\zeta\in\partial D}\varphi(\zeta)K(\zeta,z), z\in\partial D$ ，在 B-M 积分的积分边界引入一个摄动因子 r（这里 r 为强多次调和函数），摄动后的边界为 ∂D_r $(z^* = z + r(z) \in \partial D_r, z\in\partial D)$ ，于是得到边界摄动的 B-M 型积分：$\Phi_r(\varphi)(z) = \int_{\zeta^*\in\partial D_r}\varphi(\zeta^*)K(\zeta^*,z) = \int_{t\in\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(t),z)$

第二节介绍了全纯函数的 B-M 公式，并讨论了摄动函数 r 对它的影响，得到全纯函数的 B-M 公式的积分边界受到摄动以后，B-M 公式是相对稳定的，并具有形式上的美。同时也得到相关的结论：全纯函数受 r 摄动以后，仍为全纯函数；具有逐块 C^2- 光滑边界的强拟凸域经 r 摄动以后，仍具有逐块 C^2- 光滑边界；但强多次调和函数经 r 摄动以后，未必保持原有性质。

第三节讨论了边界摄动的 B-M 型积分的稳定性。第二节全纯函数的 B-M 公式涉及到全纯函数，而本节的 B-M 型积分涉及到的是满足 $H\ddot{o}lder$ 条件的函数，用 $cauchy$ 主值讨论 B-M 型积分的稳定性，可得边界摄动的 B-M 型积分是稳定的，可控制的。

第四节介绍了算子 $B_{\partial D}$ ，算子 B_D.

第五节介绍了连续函数的 B-M 公式，并讨论了边界摄动对该 B-M 公式的影响。得到连续函数的 B-M 公式的积分边界受到摄动以后，保持相对稳定，并具有形式上的美。当连续函数加强条件为全纯函数时，结论与第二章第二节的结果是吻合的。

关键词：　B-M 型积分；边界摄动；强拟凸域；稳定性.

Abstract

In this article,a perturbation factor r was introduced into the integral boundary of the Bochner-Martinelli Integrals on strictly pesudoconvex domain .When the norm of r is small enough,the B-M Integrals are steady and controllable.And the influence of r to B-M Formula was also argued.

In Chapter One, there is some preparing knowledge.It mainly introduced some definitions and lemmas,such as strictly plurisubharmonic functions,strictly pseudoconvex domain,the orientation of complex manifolds,the norm for strictly plurisubharmonic C^2- functions,and so on.

The main results are in Chapter Two.The Bochner-Martinelli Integrals $\Phi(\varphi)(z) = \int_{\zeta\in\partial D}\varphi(\zeta)K(\zeta,z), z \in \partial D$ is introduced in the first part.A perturbating factor r is introduced to the integral boundary of the B-M Integrals (The r here is a strictly plurisubharmonic function).The perturbated boundary is ∂D_r $(z^* = z + r(z) \in \partial D_r, z \in \partial D)$.So we get the B-M Integrals with perturbated integral boundary $\Phi_r(\varphi)(z) = \int_{\zeta^*\in\partial D_r}\varphi(\zeta^*)K(\zeta^*,z) = \int_{t\in\partial D}\varphi(t + r(t))K(t + r(t), z)$.

The B-M Formula of holomorphic functions is introduced in Part Two.And the influence of the perturbating factor r to the B-M Formula is also argued .And we get the result that after perturbation to the integral boundary of the B-M Formula,the B-M Formula is relatively steady and it has got its beauty in form.We also get some related results.A holomorphic function being perturbated by r remains to be holomorphic.A strictly pesudoconvex domain with piece-wise C^2- smooth boundary ,being perturbated by r ,is still with a piece-wise C^2- smooth boundary. But a strictly plurisubharmonic function being perturbated by r may not remain its original charactors.

In Part Three,the steady of the B-M Formula with perturbation to the integral boundary is studied. In Part Two,the B-M Formula of holomorphic functions concerned with holomorphic fuctions satisfied with *Hölder* conditions.The *cauchy* Principle Value is used to argue the steadiness of the B-M Integrals. Then we get the result that the B-M Integrals with perturbation to the boundary are steady and controllable.

In Part Four,the operators $B_{\partial D}$, B_D and the B-M Formula of continuous functions are introduced ,and the influence of boundary perturbation to the B-M Formula is also studied.And we also get the relatively steady result and formal beauty.When the continuous functions are ristricted to be holomorphic, we find out the result admits very well with that in Part Two ,Chapter Two.

Key words: B-M Integrals ; perturbation on the boundary ; strictly pesudoconvex domain; steadiness

引 言

解析函数的边值问题和奇异积分方程当边界曲线发生摄动时是否仍然可解，其解是否稳定，这是一个在理论上和应用上都有良好前景的课题。最早对这类问题的讨论应追溯到 1937 年 $M.V.Keldysh$ 和 $M.A.Lavrendev$[1] ， $M.V.Keldysh$ 及后来文献 [3] 关于调和函数的 $Dirichlet$ 问题在边界发生摄动时的稳定性研究。最近几年，这些问题已成为研究热点。本文讨论了强拟凸域上边界摄动的 B-M 型积分的稳定性问题，并讨论了摄动对 B-M 公式的影响。

本文分两章, 第一章主要介绍了一些重要的定义和引理, 如强多次调和函数, 强拟凸域, 复流形的定向，和强多次调和 C^2 函数等。第二章囊括了本文的主要结果，共分四节。第一节介绍了 B-M 型积分，并讨论了边界摄动的 B-M 型积分，第二节介绍了全纯函数的 B-M 公式，并讨论了摄动对它的影响。第三节讨论了边界摄动的 B-M 型积分的稳定性。第四节介绍了算子 $B_{\partial D}$ 和 B_D 。第五节介绍了解析函数的 B-M 公式，并讨论了摄动函数对它的影响。

第一章 预备知识

先回顾单复变有关定义：

定义 1*[11]：令 $D \subseteq C^1$ 是一个开集，D 上的一个连续的次调和函数是一个连续函数 $\rho : D \to R^1$, 使得下列条件满足：任意的 $\xi \in D$ 及所有的 $0 < r < dist(\xi, \partial D)$，有：

$$\rho \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=r} \rho(z)|dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\xi + re^{i\varphi}) d\varphi,$$

其中 $|dz| := \frac{r}{x_1} dz_2 = -\frac{r}{x_2} dx_1 = rd\varphi, if z = \xi + x_1 + ix_2 = \xi + re^i\varphi,$

任意调和函数是次调和的，则此时上面不等式等号成立。

定义 2*[11]: 令 $D \subseteq C^1$ 是一个开集，一个 C^2 函数 $\rho : D \to R^1$ 称为在 D 中是强次调和的，如果 $\frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z \partial \bar{z}} > 0$, 对任意的 $z \in D$.

下面过渡到多复变的情况：

定义 1[11]：令 $D \subseteq C^n$ 是一个开集,

（i）D 中的一个连续多次调和函数是一个连续函数 $\rho : D \to R^1$, 使得下列条件满足：任意的 $\nu, \omega \in C^n$, 函数 $\zeta \to \rho(\nu + \zeta\omega)$ 在 C^1 上是次调和的. D 上连续多次调和函数的集合，记为 $P^o(D)$.

（ii）一个 C^2 函数 $\rho : D \to R^1$ 称为强多次调和的，如果对任意的 $z, \omega \in C^n, \omega \neq 0$, 函数 $\zeta \to \rho(z + \zeta\omega)$ 在 C^1 上是强次调和的.

定义 2[11]：一个开集 $D \subsetneqq C^n$ 称为是拟凸的，如果函数 $-lndist(z, \partial D)$ 在 D 是多次调和的。C^n 称为是拟凸的。

命题：令 $D \subseteq C^n$ 是一个开集，如果在 ∂D 的某个领域 θ，存在一个连续多次调和 ρ，使得 $D \cap \theta = \{z \in \theta : \rho(z) < 0\}$，则 D 是拟凸的。

定义 3[11]：令 $D \subset\subset C^n$ 是一个开集。D 称为是强拟凸的，如果在 D 的边界 ∂D 的某个领域 θ 存在一个强多次调和 C^2 函数 ρ，使得 $D \cap \theta = \{z \in \theta : \rho(z) < 0\}$.

拟凸域 (强拟凸域) 的等价定义：

设 X 是一 n 维复流形， $D \subset X$ 为一区域， $z_o \in \partial D$ ，若存在 z_o 的一个领域 U 与一个定义在 U 上的实值 C^2 函数 φ 使得：

（ i ） $D \cap U = \{z \in U : \varphi(z) < 0\}$

（ ii ） $d\varphi(z_o) \neq 0$

（ iii ）对任意的 $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in X, \sum \xi_j \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}|_{z_o} = 0$

都有 $L_{z^o}(\varphi, \xi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z_k}}|_{z_o} \geq 0 (> 0), \xi \neq 0$

则称 ∂D 在点 z_o 是拟凸的 (强拟凸的) ；如果 ∂D 上每一点都是拟凸的 (强拟凸的) ，则称 D 为拟凸域 (强拟凸域) 。

定义 4[11] ：设 X 是一 n 维复流形。如果 $D \subset\subset X$ 是强拟凸开集， D 的边界 ∂D 称为逐块 C^2 的，如果存在开集 $V_1, V_2, ..., V_N$ 包含于 X ，及 C_2 函数 $\rho_k : V_k \to R, k = 1, 2, ..., N$ ，使得下列条件满足：

（ i ） $\partial D \subseteq V_1 \cup V_2 \cup ...V_N$.

（ ii ） $z \in (V_1 \cup V_2 \cup ...V_N)$ 且 $z \in D \Leftrightarrow 1 \leq k \leq N, z \in V_k, \rho_k(z) < 0.$

（ iii ）任意指标集 $1 \leq k_1 < ... < k_l \leq N$, 有 $d\rho_{k_1} \wedge d\rho_{k_2} \wedge ... \wedge d\rho_{k_n} \neq 0$, $z \in V_{k_1} \bigcap V_{k_2} \bigcap ...V_{k_l}$.

定义 5[11] ：设 $D \subset\subset X$ 是具有逐块 C^2- 边界的强拟凸开集。
对 X 选择下列定向：如果 $z_1, z_2, ..., z_n$ 是 X 中的局部全纯坐标，且 x_j 是相应的实坐标，使得 $z_j = x_j + ix_{j+n}$ ，则形式 $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$ 定义了 X 的一个定向。

设 $S_k := \{z \in \partial D \cap V_k : \rho_k(z) = 0\}, k = 1, 2, ..., N$ ，其中 V_k 和 ρ_k 如逐块 C^2- 边界的定义中所示。对任意的整数集 $K = (k_1, k_2, ..., k_l), 1 \leq k_1, ..., k_l \leq k_N$, 当 $k_1, k_2, ..., k_l$ 两两不同时定义： $S_K := S_{k_1} \cap ... \cap S_{k_l}$, 其它的则定义： $S_K := \emptyset$. 我们选择 S_K 的一个定向，使得 $\partial D = \sum_{k=1}^{N} S_k$ 及 $\partial S_K = \sum_{j=1}^{N} S_{K_j}$ 其中 ∂D 与 ∂S_K 的定向分别由 D 和 S_K 的定向诱导。 $K = (k_1, k_2, ..., k_l), Kj := (k_1, k_2, ..., k_l, j)$.

定义 6[11] ：设 θ 为 ∂D 的领域，使得 $\theta \subset\subset X$ ，记 $P_h^2(\theta)$ 为 θ 上的强多次调和 C^2- 函数类，如果 φ 是 $z \in \bar{\theta}$ 某领域的强多次调和 C^2 函数，可找到函数 $r_j \in C_o^\infty(V_j)$ ， $\sum_{j=1}^{n} r_j = 1$ ，则定义：

$\|\varphi(z)\|_2 := |\varphi(z)| + \sum_{j=1}^{L} r_j(z) [\sum_{k=1}^{2n} |\frac{\partial \varphi(z)}{\partial x_{jk}}| + \sum_{k,l=1}^{2n} |\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial x_{j,k} \partial x_{j,l}}|]$.

记： $\|\varphi\|_{2,\theta} := \sup_{z\in\theta}\|\varphi(z)\|_2$ ， $\|\varphi|_2 := \|\varphi\|_{2,\theta} + \|\varphi'\|_{2,\theta}$.
对 $\bar{\theta}$ 的邻域赋予范数 $\|\cdot\|_{2,\theta}$ ，所得的强多次调和 C^2- 函数赋范空间记为 $m_2(\bar{\theta})$.

第二章 B-M 型积分的稳定性

第一节 $B-M$ 型积分与边界摄动的 $B-M$ 积分

$B-M$ 型积分： $\Phi(\varphi)(z) = \int_{\zeta\in\partial D}\varphi(\zeta)K(\zeta,z), z\in\partial D,$
其中 $K(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'_\zeta(\bar{\zeta}-\bar{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}$ 为 B-M 核。φ 为 ∂D 某领域 θ 的强多次调和函数。
$\omega'_\zeta(\bar{\zeta}-\bar{z}) = \sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}(\bar{\zeta_j}-\bar{z_j})d\bar{\zeta_1}\wedge...\wedge[d\hat{\bar{\zeta_j}}]\wedge...\wedge d\bar{\zeta_n}, \omega(\zeta) = d\zeta_1\wedge...\wedge d\zeta_n$. 其中 $[d\hat{\bar{\zeta_j}}]$ 表示除去第 j 项。$r(z)$ 为 ∂D 某领域 θ 上的强多次调和函数。对边界 ∂D（ $z\in\partial D$ ）加一个摄动 $r(z)$（把 $r(z)$ 称为摄动函数)，得边界 ∂D_r ，（ $z^* = z+r(z)\in\partial D_r, z\in\partial D$ ），于是，上述 B-M 型积分就相应地变为：

$$\Phi_r(\varphi)(z) = \int_{\zeta^*\in\partial D_r}\varphi(\zeta^*)K(\zeta^*,z) = \int_{t\in\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(t),z),$$

其中 $K(t+r(t),z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'_\zeta(\overline{t+r(t)}-\overline{z})\wedge\omega(t+r(t))}{|t+r(t)-z|^{2n}}$,
$\omega'_t(\overline{t+r(t)}-\overline{z}) = \sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}(\overline{t_j+r(t_j)}-\overline{z_j})d(\overline{t_1+r(t_1)})\wedge...\wedge[d(\widehat{\overline{t_j+r(t_j)}})]\wedge...\wedge d(\overline{t_n+r(t_n)})$.

第二节 全纯函数 $B-M$ 公式及摄动函数 $r(z)$ 对它的影响

引理 1[4]（**全纯函数 Bochner-Martinelli 公式**） 设函数 $\varphi\in A_c(D)$, 其中 D 是 C^n 上的有界域，具有逐块光滑边界 ∂D ，那么下面的 $Bochner-Martinelli$ 公式成立：当 $z\in D$ 时， $\int_{\zeta\in\partial D}\varphi(\zeta)K(\zeta,z) = \varphi(z)$;
当 $z\bar{\in}D$ 时， $\int_{\zeta\in\partial D}\varphi(\zeta)K(\zeta,z) = 0$.
其中 $K(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'_\zeta(\bar{\zeta}-\bar{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}$ 为 $B-M$ 核。积分定向的选择是使形式 $(-i)^n d\zeta\wedge d\bar{\zeta}$ 是正的。

定理 1 设函数 $\varphi \in A_c(D)$, 其中 D 是 C^n 上的有界域, 具有逐块光滑边界 ∂D , θ 是 ∂D 的一个领域, $r(t)$ 是 θ 上的强多次调和 C^2- 函数, 则

(i) 当 $z\bar{\in}D$ 时, 有 $\int_{t\in\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(t),z)=0$;

(ii) 当 $z\in D$ 时, 存在一常数 $\tilde{M}$, 使得

$$|\int_{t\in\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(t),z)|\le\tilde{M}|\varphi(z+r(z))|.$$

证明: (i)(a) 任意取 $z\in D$, 显然在集合 $X-\{z\}$ 上有 $\partial_t K(t+r(t),z)=0$. 而且有:

$$\bar{\partial}_t K(t+r(t),z)$$
$$=\bar{\partial}_t[\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\textstyle\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\frac{(\overline{t_j+r(t_j)}-\overline{z_j})d(\overline{t_1+r(t_1)})\wedge...[d(\widehat{\overline{t_j+r(t_j)}})]...\wedge d(\overline{t_n+r(t_n)})\wedge\omega(t+r(t))}{|t+r(t)-z|^{2n}}]$$
$$=\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}(-n)[|t+r(t)-z|^2]^{-n-1}\textstyle\sum_{k=1}^n(t_k+r(t_k)-z_k)d[\overline{t_k+r(t_k)}]\wedge$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}(\overline{t_j+r(t_j)}-\overline{z_j})d(\overline{t_1+r(t_1)})\wedge...[d(\widehat{\overline{t_j+r(t_j)}})]...\wedge$$
$$d(\overline{t_n+r(t_n)})\wedge\omega(t+r(t))+\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{|t+r(t)-z|^{2n}}\textstyle\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}d(\overline{t_j+r(t_j)})\wedge$$
$$d(\overline{t_1+r(t_1)})\wedge...[d(\widehat{\overline{t_j+r(t_j)}})]...\wedge d(\overline{t_n+r(t_n)})\wedge\omega(t+r(t))$$
$$=\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{|t+r(t)-z|^{2n}}(-nd(\overline{t+r(t)})\wedge\omega(t+r(t))+nd(\overline{t+r(t)})\wedge\omega(t+r(t)))=0$$

因此 $K(t+r(t),z)$ 是一个闭形式。

(b)$\because\varphi(t+r(t))\in A_{\partial D}(D)$, $\therefore\bar{\partial}\varphi(t+r(t))=0$. 显然 $dt_j\wedge\omega(t+r(t))=0$ 因此有

令 $Q=t+r(t)$, 则:

$$d[\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)]=\partial[\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)]+\bar{\partial}[\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)]$$
$$=\textstyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial t_j}dt_jK(t+r(t),z)+\varphi(t+r(t))\partial_tK(t+r(t),z)+$$
$$\bar{\partial}\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)+\varphi(t+r(t))\bar{\partial}K(t+r(z),z)$$
$$=0$$

所以 $\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)$ 在 $C^n-\{z\}$ 上关于 t 也是一闭形式。所以当 $z\bar{\in}D$ 时, $\because$ 闭形式沿弱同调于零的循环的积分为零, $\therefore\int_{\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)=0, z\bar{\in}D$

(ii) 当 $z\in D$ 时, 以 z 为心, 以充分小正数 ε 为半径作超球 $B_\varepsilon(z,\varepsilon)\subset D$, 在 $D-B_\varepsilon$ 上应用 $Stokes$ 公式, 得: $\int_{\partial D-\partial B_\varepsilon}\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)=\int_{D-B_\varepsilon}d[\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)]=0$

即有：

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)\\
&=\int_{\partial B_\varepsilon}\varphi(t+r(t))K(t+r(z),z)\\
&=\int_{\partial B_\varepsilon}[\varphi(z+r(z))+\varphi(t+r(t))-\varphi(z+r(z))]K(t+r(z),z)\\
&=\varphi(z+r(z))\int_{\partial B_\varepsilon}K(t+r(z),z)+\int_{\partial B_\varepsilon}[\varphi(t+r(t))-\varphi(z+r(z))]K(t+r(z),z)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_\varepsilon}K(t+r(z),z)\\
&=\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon}(-1)^{j-1}(\overline{t_j+r(t_j)}-\overline{z_j})d(\overline{t_1+r(t_1)})\wedge...[\widehat{d(\overline{t_j+r(t_j)})}]...\wedge d(\overline{t_n+r(t_n)})\wedge\omega(t+r(t))\\
&=\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\sum_{j=1}^{n}\int_{B_\varepsilon}(-1)^{j-1}(d(\overline{t_j+r(t_j)})-d\bar{z}_j)\wedge d(\overline{t_1+r(t_1)})\wedge\\
&...[\widehat{d(\overline{t_j+r(t_j)})}]...\wedge d(\overline{t_n+r(t_n)})\wedge\omega(t+r(t))\\
&=\tfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{B_\varepsilon}nd(\overline{t+r(t)})\wedge d(t+r(t))\\
&=\tfrac{n!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{B_\varepsilon}d(\overline{t+r(t)})\wedge d(t+r(t))
\end{aligned}$$

记 $d(\overline{t+r(t)})\wedge d(t+r(t))=R(t)d\bar{t}\wedge dt$，其中 $R(t)$ 为 $d(\overline{t+r(t)})\wedge d(t+r(t))$ 展开后，微分形式 $d\bar{t}\wedge dt$ 的系数，它是连续的，因而在积分区域内是有界的。于是：

$$\begin{aligned}
&|\int_{\partial B_\varepsilon}K(t+r(z),z)|\\
&=|\tfrac{n!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{B_\varepsilon}d(\overline{t+r(t)})\wedge d(t+r(t))|\\
&=|\tfrac{n!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{B_\varepsilon}R(t)d\bar{t}\wedge dt|\\
&\le\tilde{M}|\tfrac{n!}{(2\pi i)^n}\tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}(2i)^n\int_{B_\varepsilon}d\xi\wedge d\eta|=\tilde{M}
\end{aligned}$$

其中 $\frac{n!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}(2i)^n\int_{B_\varepsilon}d\xi\wedge d\eta=\frac{n!}{\pi^n}\varepsilon^{-2n}Vol._{B_\varepsilon}=1$

$\because\varphi$ 在点 z 连续，$\therefore sup_{|t-z|=\varepsilon}|\varphi(t+r(t))-\varphi(z+r(z))|\to 0$，当 $\varepsilon\to 0$.

所以当 $z\in D$ 时，

$$\begin{aligned}
&|\int_{\partial D}\varphi(t+r(t))K(t+r(t),z)|\\
&\le|\varphi(z+r(z))||\int_{\partial B_\varepsilon}K(t+r(t),z)|+sup_{|t-z|=\varepsilon}|\varphi(t+r(t))-\varphi(z+r(z))||\int_{\partial B_\varepsilon}K(t+r(t),z)|\\
&\le\tilde{M}|\varphi(z+r(z))|,(\varepsilon\to 0)
\end{aligned}$$